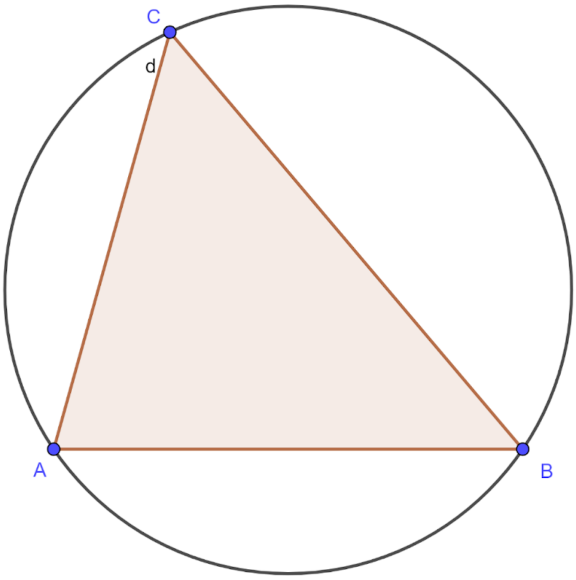
Soluzioni

ESERCIZIO 1



Dalle relazioni che vengono date, sappiamo che:

BC= $\frac{7}{6}$AB e AC= $\frac{1}{2}$AB + $\frac{5}{2}$

Perciò possiamo scrivere il perimetro come:

2p = AB + $\frac{7}{6}$AB + $\frac{1}{2}$AB+ $\frac{5}{2}$ = $\frac{37}{2}$

da cui risulta AB = 6

Per le relazioni sopra segnate si ha:

BC = 7 e AC = $\frac{11}{2}$

A questo punto si può calcolare l'area in 2 modi:

- utilizzando la formula di Erone: A= $\sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$
- oppure con la formula del raggio di una circonferenza ciroscritta a un triangolo: R = $\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4A}$, da cui A= $\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$

In entrambi i casi l'area risulta essere 16 cm^2, con approssimazione all'unità

ESERCIZIO 2

Per la formula di Eulero, noi sappiamo che F–S+V=2, con F che indica il numero di facce, S il numero di spigoli e V quello dei vertici.
Da questa relazione si ricava che F=2–V+S, da cui, nel caso di questo esercizio, F=2–60+120=62.
Il nuovo macchinario a forma di rombicosidodecaedro ha 62 facce.

ESERCIZIO 3

Per trovare la cifra delle unità del numero 18^{16} possiamo considerarlo in modulo 10, ottenendo 8^{16}. Questo passaggio non è fondamentale: se si vuole ricavare la cifra delle unità di una potenza, infatti, basta trovare quanto vale l'unità della potenza della singola unità del numero iniziale. Ovvero, se si considera come esempio 13^{4}, la cifra delle unità è l'unità della potenza 3^{4}, ovvero 1.
Comunque la si voglia pensare, a questo punto bisogna osservare che nelle unità delle potenze di 8 c'è una periodicità. Ovvero: $8^{1}=8$; $8^{2}=64$; $8^{3}=512$; $8^{4}=8096$; e $8^{5} = 32768$. Come si può osservare, la cifra delle unità esegue un ciclo completo (8,4,2,6 e di nuovo 8,4,2,6) in 4 potenze successive. Perciò, visto che 16:4=0, la cifra delle unità di 8^{16} è la stessa di 8^{4}, cioè 6.
Quindi Daniele ha risparmiato 6 math coin.

ESERCIZIO 4

In un poligono il numero delle diagonali si può ricavare dalla formula $\frac{n(n-3)}{2}$, con n ad indicare il numero dei lati. Perciò, risulta che $n^{2} - 3n = 238$. Questa è una equazione di secondo grado, che si può anche scrivere come $n^{2} - 3n - 238 = 0$
Attraverso la formula risolutiva, ricaviamo che $n_1= -14$ e $n_2= 17$.
Visto che un poligono non può avere numero di lati negativo, il poligono cob 119 diagonali ha 17 lati (eptadecagono).

ESERCIZIO 5

Visto che l'ordine di elezione non conta, è come scegliere 2 persone su 23. Usiamo quindi le combinazioni semplici

$$\frac{23!}{2!21!} = \frac{23*22}{2}=253$$

ESERCIZIO 6

Affinché il numero ottenuto sia divisibile per 6 deve essere divisibile sia per tre che per due. La somma delle cifre da 0 a 9 è divisibile per tre e quindi lo sarà anche il numero (per criterio di divisibilità per tre), mentre perché sia anche divisibile per due deve terminare con un numero pari.

Ora, sappiamo che la probabilità è $\frac{casi\ favorevoli}{casi\ totali}$, quindi separiamo il calcolo nei due casi:

1) casi favorevoli→ il numero può terminare per 0,2,4,6,8. Se termina per zero abbiamo 9! modi di trovare il numero, se termina per 2,4,6,8 dobbiamo escludere il caso in cui il numero inizia per zero, quindi possiamo comporre il numero in 8*8! modi. I casi favorevoli sono dunque la somma dei casi, 9!+4(8*8!)
2) casi totali→ basta solo che il numero non inizi per zero quindi 9*9! casi totali.

Il risultato ridotto ai minimi termini è dunque $\frac{41}{81}$

ESERCIZIO 7

Prolungando i lati dell'esagono otteniamo un triangolo equilatero (per differenza di angoli si ha un triangolo con angoli di 60°, quindi equilatero), i lati di questo triangolo sono composti sia da lati che non conosciamo (che chiamiamo x,y) che da lati che conosciamo, quindi si riesce a impostare la relazione:
$x+y+7=y+5+3=3+7+6$
quindi $x=1$ e $y=8$, il risultato è dunque 9.

ESERCIZIO 8

In questo esercizio basta calcolare il minimo comune multiplo tra i 2022 e 2024 e sommarvi 23.

La cifra delle unità è 7

ESERCIZIO 9

Per calcolare le radici del polinomio basta applicare ruffini e scomporlo in: (x-3)(x-4)(x-6), le cui radici sono 3,4,6. La base sarà quindi 3 e l'altezza 6. Da qui il volume diviso per pigreco: $\frac{3^2 \cdot 6}{3}$ = 18

ESERCIZIO 10

Dalle relazioni che ci sono state fornite dal testo possiamo ricavare che: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$ quindi $\frac{xy+xz+yz}{xyz} = \frac{3}{4}$ e visto che conosciamo il valore di xyz , ricaviamo che xy+xz+yz=54.

Visto che ci viene richiesto $x^3 + y^3 + z^3$, possiamo ricavare (x+y+z)^3 e poi sottrarre dal cubo ciò che non ci viene richiesto.(cioè il triplo prodotto del quadrato di ogni termine per la somma degli altri due e sei volte il prodotto dei tre termini.) Sommiamo il prodotto dei tre termini perché per ottenere i tripli prodotti, lo abbiamo già sottratto nove volte.

(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz= 13^3-3(13)(54)+ 3(72)= 307

ESERCIZIO 11

Chiamando x il numero di professori e y quello degli studenti, sappiamo che la media di età è data da:
$\frac{35x+25y}{x+y}$= 31

Svolgendo i conti si ottiene che 4x-6y=0 , perciò il rapporto ridotto ai minimi termini è $\frac{2}{3}$, il risultato richiesto è dunque 5.

ESERCIZIO 12

Per risolvere quest'esercizio bisogna conoscere le relazioni di Viète, e impostare il sistema con queste tre equazioni:

$a=a+b+c$
$b=ab+bc+ac$
$c=abc$

Da cui si trova che $a= -1$ $b=-1$ $c=1$
Il cui opposto della somma fa 1

ESERCIZIO 13

In questo esercizio conviene spezzare in due il conto, ragioniamo prima sul modo di disporsi dei 4 ragazzi, che corrispondono a 4!, e poi sul modo di disporsi delle 5 ragazze, cioè 5!. Per vedere i casi totali bisogna fare il prodotto dei due modi, quindi $4!\times5!=2880$

ESERCIZIO 14

Questo è un tipico esercizio di cinematica. La prima fa $\frac{3}{5}$ salti al secondo mentre l'altra ne fa 1. La seconda lepre deve recuperare 30 secondi di distacco, e cioè 18 salti. Facendo $\frac{2}{5}$ salti in più al secondo recupererà l'altra lepre in $18/(\frac{2}{5})$, cioè 45 secondi.

ESERCIZIO 15

Dire che la somma dei numeri sulle facce visibili sia uguale a trentacinque, è come dire che la somma delle due non visibili (che stanno sul pavimento) sia uguale a sette, in quanto la somma di tutte le facce è 42. A questo punto cerchiamo di capire in quanti modi possiamo fare 7, e i modi sono 1+6, 2+5, 3+4 e viceversa, quindi 6 modi totali. Mentre i casi totali sono 6x6=36. A questo punto la probabilità equivale a $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ e la risposta è 7.

ESERCIZIO 16

In questo esercizio bisogna ricordare la relazione dell'area del triangolo grande con l'area dei triangolini. Infatti preso un qualsiasi punto P interno al triangolo, si ha che se si tracciano le parallele ai lati passanti per quel punto otterremo tre parallelogrammi e tre triangoli e che l'area del triangolo di partenza è il quadrato della somma delle radici delle aree dei tre triangolini ottenuti.

In questo caso l'area è (abbiamo inserito i nomi dei triangoli sotto le radici, ma si intende l'area degli stessi) ($\sqrt{KID} + \sqrt{DEF} + \sqrt{DHG}$)^2.
L'area di DHG è la differenza tra l'area del pentagono con quella del quadrilatero e quella del triangolino MHD, la cui area è la radice di 64, in quanto è identica a quella di DMH. A questo punto l'area risulta (3+2+6)^2=121

ESERCIZIO 17

In questo esercizio bisogna capire che gli spostamenti da fare sono 8 verso destra e 2 verso l'alto. A questo punto per capire il numero di percorsi possibili basta costruire una parola con 8 D e 2 S e calcolarne gli anagrammi.
$\frac{10!}{8!\,2!}$= 45

ESERCIZIO 18

Per dimostrare che 13 problemi bastano è sufficiente mostrare un esempio, per costruire il quale può essere utile ed istruttivo pensare al piano proiettivo su Z3.
Per dimostrare che 12 problemi non bastano, si possono seguire almeno 2 strade.
• Se i problemi sono 12 o meno, almeno un problema va a 4 studenti .
• Siano k i problemi, e siano s1, . . . , sk i numeri di studenti che li ricevono. Inoltre $\binom{s_1}{2} + \ldots + \binom{s_{12}}{2} \leq \binom{10}{2}$ poichè nel LHS ogni coppia di studenti viene contata al più una volta . Svolgendo i calcoli ed applicando la disuguaglianza tra le medie QM-AM per stimare la somma dei quadrati degli s_i , si giunge alla disuguaglianza
k > 40^2/130.

Soluzioni

1) 16
2) 62
3) 6
4) 17
5) 253
6) 122
7) 9
8) 7
9) 18
10) 307
11) 5
12) 1
13) 2880
14) 45
15) 7
16) 121
17) 45
18) 13